

## Ответы: ЕГЭ по математике (профиль)

<b>1</b>	20
<b>2</b>	6
<b>3</b>	289
<b>4</b>	0,08
<b>5</b>	0,9951
<b>6</b>	7
<b>7</b>	-15
<b>8</b>	6
<b>9</b>	12
<b>10</b>	14
<b>11</b>	56
<b>12</b>	43
<b>13</b>	<b>Решения</b>

а) Преобразуем уравнение:

$$10 \sin x \cos x - 5\sqrt{2} \sin x + 16 \cos x - 8\sqrt{2} = 0;$$
$$(5 \sin x + 8)(2 \cos x - \sqrt{2}) = 0,$$

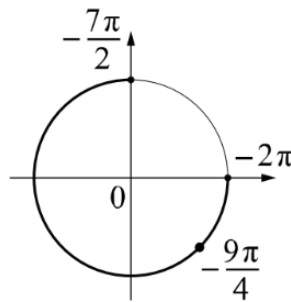
откуда следует, что  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  или  $\sin x = -\frac{8}{5}$ .

Уравнение  $\sin x = -\frac{8}{5}$  решений не имеет, а из уравнения  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  получим

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку

$$\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right].$$



Получим число  $-\frac{9\pi}{4}$ .

**Ответ:** а)  $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$  б)  $-\frac{9\pi}{4}$ .

**Решение.**

а) В треугольнике  $SAB$  имеем

$$SB^2 = 264 = 120 + 144 = SA^2 + AB^2,$$

поэтому треугольник  $SAB$  прямоугольный с гипотенузой  $SB$  и прямым углом  $SAB$ . Аналогично в треугольнике  $SAD$  из равенства

$$SD^2 = 145 = 120 + 25 = SA^2 + AD^2$$

получаем, что  $\angle SAD = 90^\circ$ . Так как прямая  $SA$  перпендикулярна прямым  $AB$  и  $AD$ , прямая  $SA$  перпендикулярна плоскости  $ABD$ . Получили, что ребро  $SA$  — высота пирамиды  $SABCD$ .

б) На прямой  $AB$  отметим такую точку  $E$ , что  $BDCE$  — параллелограмм, тогда  $BE = DC = AB$  и  $DB = CE$ . Угол  $SCE$  искомый.

В прямоугольных треугольниках  $ABD$ ,  $SAC$  и  $SAE$

$$AC = BD = CE = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 13; \quad SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 17 \text{ и}$$

$$SE^2 = SA^2 + AE^2 = 696.$$

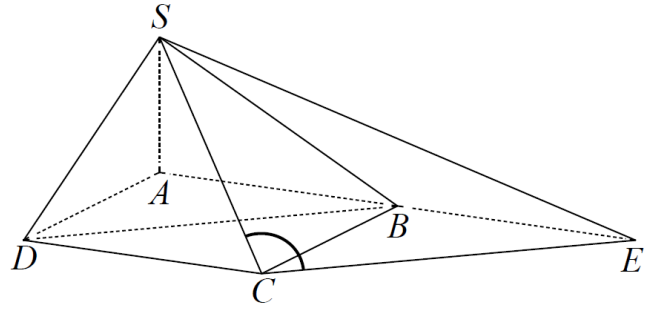
По теореме косинусов в треугольнике  $SCE$ :

$$SE^2 = SC^2 + CE^2 - 2SC \cdot CE \cdot \cos \angle SCE; \quad 696 = 289 + 169 - 442 \cos \angle SCE;$$

$$\cos \angle SCE = -\frac{7}{13}.$$

Искомый угол равен  $\arccos \frac{7}{13}$ .

**Ответ:** б)  $\arccos \frac{7}{13}$ .



15

**Решение.**

Преобразуем неравенство:

$$(16^x - 7 \cdot 4^x)^2 - 2(16^x - 7 \cdot 4^x) - 48 < 0;$$

$$(16^x - 7 \cdot 4^x - 8)(16^x - 7 \cdot 4^x + 6) < 0;$$

$$(4^x - 8)(4^x + 1)(4^x - 6)(4^x - 1) < 0.$$

Следовательно,  $-1 < 4^x < 1$  или  $6 < 4^x < 8$ , откуда  $x < 0$  или  $\log_4 6 < x < 1,5$ .

Таким образом,  $x \in (-\infty; 0) \cup (\log_4 6; 1,5)$ .

**Ответ:**  $(-\infty; 0); (\log_4 6; 1,5)$ .

16

**Решение.**

По условию долг перед банком (в тысячах рублей) по состоянию на июль 2025–2035 годов должен уменьшаться до нуля следующим образом:

800; 720; 640; 560; 480; 400; 320; 240; 160; 80; 0.

В январе каждого года с 2026 по 2030 долг возрастает на 18 %, а в январе каждого года с 2031 по 2035 — на 16 %, значит, последовательность размеров долга (в тысячах рублей) в январе 2026–2035 годов такова:

944; 849,6; 755,2; 660,8; 566,4; 464; 371,2; 278,4; 185,6; 92,8.

Таким образом, выплаты (в тысячах рублей) должны быть следующими:

224; 209,6; 195,2; 180,8; 166,4; 144; 131,2; 118,4; 105,6; 92,8.

Значит, общая сумма выплат (в тысячах рублей) составит

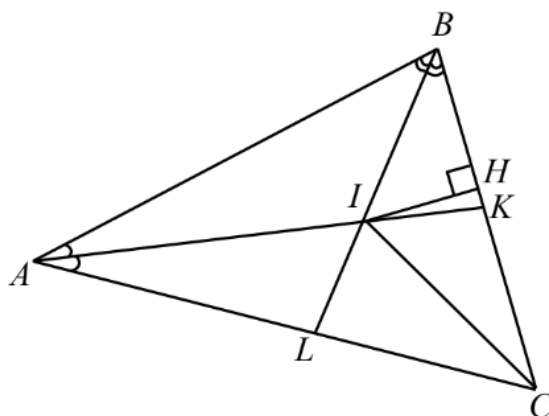
$224+209,6+195,2+180,8+166,4+144+131,2+118,4+105,6+92,8=568$ .

**Ответ:** 1,568 млн рублей.

17

### Решение.

а) Обозначим через  $\alpha$  и  $\beta$  углы  $CAB$  и  $ABC$  соответственно. Тогда углы  $IAB$  и  $ABI$  равны  $\frac{\alpha}{2}$  и  $\frac{\beta}{2}$  соответственно. По теореме о сумме углов треугольника получаем, что угол  $BIA$  равен  $180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$ . Такая же величина вертикального угла  $LIK$ .



По условию около четырёхугольника  $CKIL$  можно описать окружность. Следовательно, угол  $BCA$  дополняет угол  $LIK$  до  $180^\circ$ . С другой стороны, по теореме о сумме углов треугольника угол  $BCA$  дополняет до  $180^\circ$  сумму углов  $\alpha$  и  $\beta$ . Следовательно,  $180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \alpha + \beta$ , откуда  $\alpha + \beta = 120^\circ$ .

Значит, угол  $BCA$  равен  $60^\circ$ .

б) Поскольку точка  $I$  является точкой пересечения биссектрис  $AK$  и  $BL$ , она также лежит на биссектрисе угла  $BCA$  и является центром вписанной окружности в треугольник  $ABC$ . Значит, радиус этой окружности равен длине перпендикуляра  $IH$ , опущенного из этой точки на сторону  $BC$ .

По доказанному, угол  $HCI$  равен половине угла  $BCA$ , то есть он равен  $30^\circ$ . В прямоугольном треугольнике  $HCI$  против угла в  $30^\circ$  лежит катет  $IH$ .

Следовательно,  $IH = \frac{1}{2} \cdot IC = 5$ .

Площадь треугольника  $ABC$  равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности. Значит, эта площадь равна  $\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 5 = 125$ .

**Ответ:** б) 125.

18

**Решение.**

Запишем функцию в виде  $y = f(x) = \frac{5a + 10(5 - a)x}{(5x + a)^2 + 16}$ . Её областью

определения является вся числовая прямая, поскольку знаменатель не обращается в ноль. Данная функция непрерывна на всей числовой прямой.

При  $x$  стремящемся к  $+\infty$  или  $-\infty$  значение функции  $f(x) = \frac{5a + 10(5 - a)x}{(5x + a)^2 + 16}$

стремится к 0. Учитывая поведение функции на  $+\infty$  и  $-\infty$  и наличие двух критических точек — точки минимума и точки максимума, следует, что множеством значений функции является отрезок. Тогда, для того чтобы множество значений функции содержало отрезок  $[0; 1]$ , оно должно содержать точки 0 и 1. Таким образом, условие задачи выполнено для тех и только тех значений  $a$ , для которых имеют решения уравнения

$$f(x) = \frac{5a + 10(5 - a)x}{(5x + a)^2 + 16} = 0 \text{ и } f(x) = \frac{5a + 10(5 - a)x}{(5x + a)^2 + 16} = 1.$$

$\left[ \frac{5 + \sqrt{13}}{2}; +\infty \right)$ . Следовательно, условию задачи удовлетворяют значения

$$a \in \left( -\infty; \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right] \cup \left[ \frac{5 + \sqrt{13}}{2}; 5 \right) \cup (5; +\infty).$$

$$\text{Ответ: } \left( -\infty; \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right], \left[ \frac{5 + \sqrt{13}}{2}; 5 \right), (5; +\infty).$$

**Решение.**

а) Пусть первоначально на доске было 14 чисел, равных 7, и одно число, равное 1. Их среднее арифметическое равно  $\frac{14 \cdot 7 + 1}{15} = 6,6$ . Пусть число, равное 1, уменьшилось на 1 (после чего было стёрто с доски), а остальные числа не изменились. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно  $\frac{14 \cdot 7}{14} = 7$ .

б) Пусть с доски было стёрто  $k$  чисел, сумма остальных чисел до уменьшения была равна  $S$ , а после уменьшения стала равна  $S - n$ , где  $n$  — количество чисел, которые были уменьшены на 1, но не были стёрты с доски. По условию  $\frac{S + k}{15} = 26$ , то есть  $S = 390 - k$ . Среднее арифметическое оставшихся

чисел равно  $\frac{S - n}{15 - k} = 33$ , тогда получим  $\frac{390 - k - n}{15 - k} = 33$ . Из этого равенства находим  $32k = 105 + n$ . Число  $n$  лежит в пределах от 0 до 15, поэтому  $105 + n$  лежит в пределах от 105 до 120. В этом промежутке нет целых чисел, делящихся на 32.

в) Пусть с доски было стёрто  $k$  чисел, сумма остальных чисел до уменьшения была равна  $S$ , а после уменьшения стала равна  $S - n$ . По условию  $\frac{S + k}{15} = 26$ , то есть  $S = 390 - k$ . Необходимо найти наибольшее возможное значение числа  $A = \frac{S - n}{15 - k}$ . Имеем

$$A = \frac{S - n}{15 - k} = \frac{390 - k - n}{15 - k} \leq \frac{390 - k}{15 - k} = 1 + \frac{375}{15 - k}.$$

Число  $A$  будет наибольшим, если  $n = 0$  и число  $k$  будет принимать

наибольшее возможное значение. Оценим это значение. Так как каждое из первоначально написанных на доске чисел было не более 40 и на доске осталось  $15 - k$  чисел, для суммы  $S$  выполняется неравенство

$$390 - k = S \leq 40(15 - k),$$

откуда следует, что

$$390 - k \leq 40(15 - k); \quad 39k \leq 210; \quad k \leq \frac{70}{13} < 6; \quad k \leq 5.$$

Значит,

$$A \leq 1 + \frac{375}{15 - k} \leq 1 + \frac{375}{10} = 38,5.$$

Приведём пример, показывающий, что среднее арифметическое оставшихся на доске чисел действительно могло стать равным 38,5. Пусть первоначально на доске было написано 5 единиц, 9 чисел, равных 40, и одно число,

равное 25. Тогда их среднее арифметическое было равно  $\frac{5 + 9 \cdot 40 + 25}{15} = 26$ .

Пусть 5 чисел, равных единице, уменьшились на 1 (после чего были стёрты с доски), а остальные числа не изменились. Тогда среднее арифметическое оставшихся чисел равно  $\frac{9 \cdot 40 + 25}{10} = 38,5$ .

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 38,5.